Lista zagadnień do egzaminu magisterskiego na kierunku matematyka w roku 2020/21
- do wyboru zgodnie z punktem 5 Uchwały nr 02/05/2010 Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UJ z dnia 27 maja 2010 roku „Zasady przeprowadzania egzaminu dyplomowego na studiach stacjonarnych II stopnia na kierunku matematyka obowiązujące od rekrutacji 2010/2011"

Zgłaszając dany temat, należy:
(a) znać wypowiedzi podstawowych definicji i twierdzeń, które go dotyczą,
(b) znać przykłady ilustrujące występujące pojęcia (pozytywne i negatywne),
(c) znać logiczne powiązania pomiędzy odpowiednimi pojęciami i twierdzeniami,
(d) znać ewentualne zastosowania omawianego zagadnienia w innych dziedzinach matematyki lub w innych dziedzinach wiedzy.

1. Przestrzenie topologiczne, metody wprowadzania topologii. Bazy i bazy otoczeń. Topologia indukowana, topologia produktowa, topologia ilorazowa. Topologie na przestrzeniach funkcyjnych.

2. Ciągłość, homeomorfizmy, niezmienniki homeomorfizmów. Zwartość i ciągowa zwartość. Spójność, łukowa spójność, składowe spójne. Warunki równoważne spójności. Sumy i przecięcia zbiorów zwartych i zbiorów spójnych.

3. Aksjomaty oddzielania. Przestrzenie Hausdorffa, przestrzenie regularne, przestrzenie normalne. Przestrzenie $T_{3 1/2}$. Lemat Urysona. Twierdzenie Tietzego.

4. Przykłady przestrzeni metrycznych zupełnych, z uwzględnieniem przestrzeni Banacha i Hilberta. Twierdzenie Cantora o zstępującym ciągu zbiorów w przestrzeni zupełnej, Twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. Retrakt i retrakcja.

5. Przestrzenie metryczne i metryzowalne. Twierdzenia o metryzowalności. Odległość od zbioru. Zbiory gęste, przestrzenie ośrodkowe.

6. Grupa podstawowa. Homotopie odwzorowań, typ homotopii odwzorowań. Twierdzenie Jordana o rozcinaniu dla płaszczyzny i dla przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej. Grupy homologii.

7. Ciągłość odwzorowań liniowych; warunki równoważne na ciągłość operatora, warunki równoważne na ciągłość funkcjonałów. Twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału liniowego.

8. Przestrzenie Hilberta i nierówność Cauchy'ego-Schwarza. Nierówność Bessela. Charakteryzacje bazy ortonormalnej, szeregi Fouriera. Tożsamość Parsevala.

9. Twierdzenie Hahna-Banacha (wersja rzeczywista i ogólna); wnioski z twierdzenia Hahna-Banacha, twierdzenie o oddzielaniu zbiorów wypukłych (wersja rzeczywista i zespolona).

10. Przestrzenie Banacha. Twierdzenie Banacha-Alaoglu. Twierdzenie Banacha-Steinhausa. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, odwzorowaniu odwrotnym i o wykresie domkniętym.

11. Sigma algebry: przykłady, iloczyny kartezjańskie, funkcje mierzalne, zbiory borelowskie. Miara: miara licząca, miara probabilistyczna, dystrybuanta. Twierdzenie Carathéodory'ego. Przeniesienie miary przez odwzorowanie. Iloczyn kartezjański miar.

12. Miara Lebesgue'a: zarys konstrukcji, zbiory miary zero, zbiory niemierzalne i rozkłady paradoksalne.

Aktualizacja: 14 listopada 2020 r.

Lista zagadnień do egzaminu magisterskiego na kierunku matematyka w roku 2020/21
- do wyboru zgodnie z punktem 5 Uchwały nr 02/05/2010 Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UJ z dnia 27 maja 2010 roku „Zasady przeprowadzania egzaminu dyplomowego na studiach stacjonarnych II stopnia na kierunku matematyka obowiązujące od rekrutacji 2010/2011"

13. Całka; przykłady całek względem: miary liczącej, miary Lebesgue'a, miary zadanej przez dystrybuantę, całka względem transportu miary. Twierdzenie Fubiniego, Zasada Cavaleriego. Zamiana zmiennych w całce. Porównanie całek Riemanna i Lebesgue'a.

14. Miara absolutnie ciągła, gęstość. Twierdzenie Radona-Nikodyma. Twierdzenie o zmianie miary w całce.

15. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, lemat Fatou, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.

16. Zmienne losowe i ich rozkłady. Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej. Niezależność zmiennych losowych.

17. Prawa wielkich liczb. Centralne twierdzenia graniczne.

18. Warunki równoważne na holomorficzność funkcji. (Równania Cauchy'ego-Riemanna, twierdzenie o niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania, twierdzenie całkowe Cauchy'ego, twierdzenie o holomorficzności funkcji określonej całką krzywoliniową).

19. Zasada identyczności dla szeregów i funkcji holomorficznych. Zasada maksimum i zasada minimum.

20. Punkty osobliwe - charakteryzacja. Twierdzenie o residuach i jego zastosowania do wyznaczania całek.

21. Odwzorowania konforemne, twierdzenie Riemanna.

22. Definicja dyfeomorfizmu, twierdzenie o funkcji uwikłanej, twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie.

23. Różne wersje twierdzenia o przyrostach. Wersje wzoru Taylora z resztą Lagrange'a, z resztą Peano. Rozwijanie funkcji w szereg.

24. Podrozmaitości przestrzeni euklidesowych. Miara i całka Lebesgue'a na podrozmaitościach.

25. Ekstrema lokalne funkcji rzeczywistych - warunki istnienia; formy kwadratowe i ich określoność. Podrozmaitości przestrzeni euklidesowych i ekstrema warunkowe.

26. Formy różniczkowe własności, różniczkowanie, całkowanie. Lemat Poincarego. Twierdzenie Stokesa, twierdzenie Greena w R^2, twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego w R^3.

27. Równania różniczkowe zwyczajne – istnienie, jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego, ciągła zależność rozwiązań od warunków początkowych.

28. Równania różniczkowe liniowe i ich dynamika. Związki z algebrą liniową – wartości i wektory własne, twierdzenie Jordana.

29. Układy dynamiczne generowane przez równania różniczkowe. Punkty stacjonarne i ich stabilność. Funkcje Lapunowa i linearyzacja. Kryteria niestabilności punktów stacjonarnych.

Aktualizacja: 14 listopada 2020 r.

Lista zagadnień do egzaminu magisterskiego na kierunku matematyka w roku 2020/21
- do wyboru zgodnie z punktem 5 Uchwały nr 02/05/2010 Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UJ z dnia 27 maja 2010 roku „Zasady przeprowadzania egzaminu dyplomowego na studiach stacjonarnych II stopnia na kierunku matematyka obowiązujące od rekrutacji 2010/2011"

30. Równania różniczkowe cząstkowe – klasyczne równania fizyki (równanie Laplace'a, równanie ciepła, równanie falowe), wybrane metody rozwiązywania zagadnień początkowych i brzegowych.

31. Grupy i ich homomorfizmy, podgrupy normalne, grupy ilorazowe. Twierdzenie Lagrange'a. Grupy przekształceń, grupy permutacji.

32. Ciała ułamków. Rozszerzenia ciał. Ciało rozkładu wielomianu. Ciała algebraicznie domknięte.

33. Teoria Galois skończonych rozszerzeń ciał – grupa Galois rozszerzenia ciał, główne twierdzenie teorii Galois, grupa Galois wielomianu. Rozwiązalność równań algebraicznych (twierdzenie Abela-Ruffiniego, równania stopnia dwa, trzy i cztery).

34. Rozmaitości Riemanna, koneksje liniowe, tensor torsji i krzywizny, krzywizna sekcyjna.

35. Narodziny metody dedukcyjnej w Grecji. Szkoła pitagorejska i jej osiągnięcia. Matematyka okresu hellenistycznego. „Elementy" Euklidesa i dzieło Apolloniusza. Fenomen Archimedesa.

36. Matematyka w Średniowieczu, scholastyka, powstawanie i rola uniwersytetów. Wkład świata islamu do rozwoju matematyki.

37. Matematyka w wieku XVII - w wieku przełomów. Prace Kartezjusza, Fermata, Pascala, Newtona i Leibniza oraz rodziny Bernoullich.

38. Matematyka XVIII wieku. Euler. Powstawanie nowych dziedzin, analiza matematyczna, narodziny rachunku prawdopodobieństwa, mechanika analityczna, d'Alembert, Lagrange, Laplace.

39. Wielkie postacie matematyki XIX wieku. Gauss i jego wkład. Abel, Galois i Wantzel. Powstanie geometrii nieeuklidesowej: Bolyai i Łobaczewski. Rewolucyjne prace Riemanna. Formalizacja analizy, Cauchy, Weierstrass.

40. Narodziny algebry abstrakcyjnej, Jordan. Początki topologii, Möbius, Listing, Cantor, Poincaré. Powstanie teorii mnogości, problemy z nieskończonością. Hilbert i jego problemy.

41. Polska szkoła matematyczna, jej przedstawiciele i największe osiągnięcia: szkoła lwowska, szkoła warszawska i szkoła krakowska.

Aktualizacja: 14 listopada 2020 r.