

WYKAZ PYTAŃ NA EGZAMIN LICENCJACKI

- (1) Rozwiązać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (zmienna rzeczywista).
- (2) Rozwiązać równania i nierówności pierwiastkowe z jedną niewiadomą.
- (3) Rozwiązać równania i nierówności z wartością bezwzględną, z jedną niewiadomą.
- (4) Rozwiązać nierówności wymierne z jedną niewiadomą.
- (5) Rozwiązać równania i nierówności wykładnicze.
- (6) Rozwiązać równania i nierówności logarytmiczne.
- (7) Rozwiązać równania i nierówności trygonometryczne (z zastosowaniem prostych wzorów trygonometrycznych i wzorów redukcyjnych).
- (8) Rozwiązać graficznie na płaszczyźnie nierówności zadane przez funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych.
- (9) Rozwiązać równania kwadratowe z jedną niewiadomą (zmienna zespolona).
- (10) Dowieść twierdzeń o liczbach naturalnych za pomocą zasady indukcji matematycznej.
- (11) Dla zadanej rodziny zbiorów indeksowanych jednym, dwoma lub trzema wskaźnikami znaleźć wynik operacji sumy/przecięcia po odpowiedniej rodzinie/rodzinach indeksów.
- (12) Dla podanego zbioru skończonego A wypisać zbiór jego podzbiorów $P(A)$.
- (13) Uzasadnić zależności lub podać kontrprzykłady dla zbiorów połączonych działaniami " $\cup$ ", " $\cap$ ", " $\setminus$ ", " $\times$ " oraz relacjami " $\subset$ ", " $=$ ".
- (14) Dla podanego podzbioru $\mathbb{R}$ znaleźć jego kres górny oraz kres dolny.
- (15) Sprawdzić, czy podana relacja jest relacją równoważności.
- (16) Dla zadanej relacji równoważności znaleźć klasy równoważności.
- (17) Sprawdzić, czy podana funkcja jest surjekcją i injekcją.
- (18) Dla zadanej funkcji znaleźć obrazy danych podzbiorów dziedziny i przeciwobrazy danych podzbiorów przeciwdziedziny.
- (19) Sprawdzić, czy podana relacja jest odwzorowaniem, a jeśli tak, to wyznaczyć jej dziedzinę i zbiór wartości.
- (20) Sprawdzić, czy podana relacja jest relacją częściowego porządku/liniowego porządku.
- (21) Dla zadanej relacji częściowego porządku wskazać przykłady łańcuchów i antyłańcuchów o zadanej mocy.
- (22) Dla zadanej relacji częściowego porządku znaleźć elementy maksymalne i minimalne.
- (23) Wykazać równoliczność z $\mathbb{N}$ zadanego zbioru przeliczalnego.
- (24) Dla podanego zbioru, w szczególności podzbioru $\mathbb{R}^n$, znaleźć jego moc.
- (25) Obliczyć granicę ciągów typu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n + b_n + c_n}$, gdzie $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ są ciągami.
- (26) Obliczyć granicę ciągów typu $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^{w(n)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{a}{n})^{w(n)}$, $a > 0$, gdzie w jest wielomianem.
- (27) Dla zadanego ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ znaleźć jego granicę górną $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ oraz granicę dolną $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (28) Obliczyć granicę typu $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$, gdzie $f(x) = \sqrt{h(x)}$, a g, h są wielomianami.
- (29) Obliczyć granicę typu $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})$, gdzie f, g są wielomianami.
- (30) Obliczyć granicę typu $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(ax)}{g(bx)}$, $a, b \in \mathbb{R}$, gdzie f, g są funkcjami trygonometrycznymi, wykładniczymi, logarytmicznymi lub wielomianami oraz $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$.
- (31) Obliczyć granicę typu $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, gdzie f jest funkcją wymierną oraz $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$ (także granice jednostronne).
- (32) Obliczyć granicę typu $\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$.
- (33) Obliczyć pochodną iloczynu funkcji, ilorazu funkcji, funkcji złożonej jednej zmiennej.
- (34) Obliczyć pochodną funkcji typu $x \mapsto f(x)^{g(x)}$.
- (35) Obliczyć pochodną funkcji danej całką, w której górna granica całkowania jest zależna od zmiennej, względem której różniczkujemy.
- (36) Znaleźć ekstrema lokalne zadanej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

- (37) Znaleźć asymptoty pionowe, poziome i ukośne funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
- (38) Określić przedziały, w których podana funkcja jednej zmiennej rzeczywistej (wielomian, funkcja wymierna, funkcje złożone wykorzystujące funkcję wykładniczą, logarytmiczną, funkcje trygonometryczne) jest rosnąca, malejąca.
- (39) Określić przedziały, w których podana funkcja jednej zmiennej rzeczywistej (wielomian, funkcja wymierna, funkcje złożone wykorzystujące funkcję wykładniczą, logarytmiczną, funkcje trygonometryczne) jest wypukła (do góry) lub wklęsła (inaczej: wypukła do dołu).
- (40) Z badać, czy istnieje najmniejsza i największa wartość danej funkcji różniczkowalnej na zadanym przedziale i ewentualnie je wyznaczyć.
- (41) Rozwinąć daną funkcję w szereg Taylora w zadanym punkcie.
- (42) Obliczyć całkę nieoznaczoną typu $\int f(x)g(x)dx$, gdzie f jest jednomianem lub wielomianem co najwyżej drugiego stopnia, a g jedną z funkcji: exponens, sinus, cosinus, logarytm naturalny.
- (43) Obliczyć całkę nieoznaczoną metodą całkowania przez podstawienie.
- (44) Obliczyć całkę nieoznaczoną metodą całkowania przez części.
- (45) Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji wymiernych.
- (46) Obliczyć całkę nieoznaczoną typu $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$.
- (47) Obliczyć całkę oznaczoną $\int_a^b f(t)dt$, gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$, w szczególności sprawdzić, czy całka ta jest zbieżna.
- (48) W oparciu o twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć pochodną funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, odwrotnej do danej (np. pochodną funkcji arcus sinus, arcus tangens).
- (49) Obliczyć pole podanego obszaru, np. ograniczonego wykresami dwóch funkcji: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.
- (50) Obliczyć długość krzywej zadanej parametrycznie $(\alpha, \beta) \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.
- (51) Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji dookoła osi odciętych.
- (52) Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji dookoła osi odciętych.
- (53) Z badać zbieżność (i jej rodzaj) zadanego szeregu liczbowego w oparciu o kryteria Cauchy'ego, d'Alemberta, Weierstrassa, Leibniza i warunek konieczny zbieżności szeregów.
- (54) Wyznaczyć punkty, w których zadany szereg funkcyjny jest zbieżny bezwzględnie, zbieżny warunkowo, rozbieżny w oparciu o kryteria Cauchy'ego, d'Alemberta, Weierstrassa, Leibniza i warunek konieczny zbieżności szeregów.
- (55) Rozwinąć podaną funkcję w szereg Fouriera na zadanym przedziale.
- (56) W oparciu o wzór de Moivre'a wyznaczyć część rzeczywistą lub część urojoną potęgi podanej liczby zespolonej (np. $\operatorname{Re} (\sqrt{3} - i)^{17}$, $\operatorname{Im} (\cos \phi + i \sin \phi)^5$).
- (57) Uprościć podaną potęgę korzystając ze wzoru Newtona i trójkąta Pascala (np. podać w postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, liczbę $(1 - \sqrt{2})^7$).
- (58) Z badać liniową niezależność danego układu wektorów.
- (59) Sprawdzić, czy podane wektory stanowią bazę danej przestrzeni wektorowej.
- (60) Sprawdzić, czy dana przestrzeń wektorowa jest sumą prostą wskazanych podprzestrzeni.
- (61) Wyznaczyć bazę dualną do danej.
- (62) Sprawdzić, czy dany zbiór jest podprzestrzenią wektorową danej przestrzeni wektorowej.
- (63) Dla danej przestrzeni wektorowej i dwóch jej podprzestrzeni U, W wyznaczyć wymiary dla podprzestrzeni $U, W, U \cap W$ oraz $U + W$.
- (64) Dla danej przestrzeni wektorowej i dwóch jej podprzestrzeni U, W podać przykłady baz dla podprzestrzeni $U, W, U \cap W$ oraz $U + W$.
- (65) Dla danego odwzorowania liniowego f wyznaczyć bazę i wymiar przestrzeni $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$.
- (66) Sprawdzić, czy dane odwzorowanie jest epimorfizmem/monomorfizmem.
- (67) Znaleźć odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$, o zadanym jądrze i obrazie.
- (68) Wyznaczyć macierz odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, w danych bazach.

- (69) Obliczyć wyznacznik macierzy o rozmiarach 2×2 , 3×3 i 4×4 i współczynnikach rzeczywistych.
- (70) Obliczyć iloczyn danych macierzy o współczynnikach rzeczywistych.
- (71) Sprawdzić, czy dana macierz 2×2 lub 3×3 jest odwracalna, w zależności od parametru występującego w macierzy.
- (72) Odwrócić macierz (odwracalną) o rozmiarach 2×2 lub 3×3 i współczynnikach rzeczywistych.
- (73) Znaleźć wartości własne i wektory własne (po jednym dla każdej wartości własnej) endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, którego wielomian charakterystyczny ma tylko rzeczywiste pierwiastki.
- (74) Znaleźć macierz Jordana endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, którego wielomian charakterystyczny ma tylko rzeczywiste pierwiastki.
- (75) Rozwiązać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi o współczynnikach rzeczywistych.
- (76) Wyznaczyć macierz formy kwadratowej na $\mathbb{R}^2$ w danej bazie.
- (77) Znaleźć rząd danego odwzorowania liniowego.
- (78) Sprawdzić, czy podana funkcja jest iloczynem skalarnym.
- (79) W danej wektorowej przestrzeni z iloczynem skalarnym ($\mathbb{R}^n$) zbadać prostopadłość wskazanych wektorów.
- (80) Dla danej przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym ($\mathbb{R}^n$) oraz pewnej jej podprzestrzeni wyznaczyć dopełnienie ortogonalne tej podprzestrzeni.
- (81) Wyznaczyć największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych i przedstawić go w postaci kombinacji liniowej (o współczynnikach całkowitych) tych liczb.
- (82) Rozwiązać zadany układ kongruencji liniowych (podać rozwiązanie ogólne bądź z konkretnie zadanego przedziału liczbowego).
- (83) Zbadać istnienie/podać rozwiązanie zadanego liniowego równania diofantycznego postaci $ax + by = c$.
- (84) Dla zadanych liczb całkowitych k i m wyliczyć $k \bmod m$ z zastosowaniem twierdzeń Fermata lub Eulera.
- (85) Przy danym zbiorze niepustym X i danym odwzorowaniu $*$: $X \times X \ni (a, b) \mapsto a * b \in X$ sprawdzić, czy $(X, *)$ jest grupą.
- (86) W danej grupie sprawdzić, czy wskazany podzbiór tej grupy jest podgrupą.
- (87) Dla danej grupy i jej podgrupy zbadać normalność tej podgrupy.
- (88) Dla danej grupy i jej podgrupy normalnej wyznaczyć warstwy względem tej podgrupy (warstwę ustalonego elementu względem tej podgrupy).
- (89) Dla zadanej grupy G i jej elementu a wyznaczyć podgrupę generowaną przez a bądź wyliczyć rząd elementu a .
- (90) Dla zadanej grupy G i jej podgrupy normalnej H opisać elementy grupy ilorazowej G/H .
- (91) Sprawdzić, czy dane odwzorowanie pomiędzy podanymi grupami jest homomorfizmem/epimorfizmem/monomorfizmem.
- (92) Rozłożyć daną permutację na transpozycje oraz określić parzystość permutacji.
- (93) Rozłożyć daną permutację na iloczyn cykli rozłącznych.
- (94) Wypisać postać elementów w zadanym pierścieniu ilorazowym, sprawdzić czy istnieje i ewentualnie wyliczyć element odwrotny do zadanego elementu w takim pierścieniu.
- (95) Wyznaczyć wszystkie dzielniki zera w danym pierścieniu.
- (96) Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne w danym pierścieniu.
- (97) W danym pierścieniu sprawdzić, czy wskazany podzbiór tego pierścienia jest ideałem w tym pierścieniu.
- (98) Zbadać nierozkładalność zadanego wielomianu o współczynnikach w pierścieniach: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.
- (99) Sprawdzić, czy dane odwzorowanie pomiędzy podanymi pierścieniami jest homomorfizmem/epimorfizmem/monomorfizmem.

- (100) Sprawdzić, czy podana funkcja jest metryką na danym zbiorze.
- (101) Sprawdzić, czy podana funkcja jest normą na danym zbiorze.
- (102) Przy zadanej metryce wyznaczyć/naszkicować kule otwarte/domknięte o zadanym środku i promieniu.
- (103) W danej przestrzeni metrycznej/topologicznej znaleźć wnętrze, domknięcie, brzeg zadanych zbiorów.
- (104) Sprawdzić otwartość/domkniętość zadanego podzbioru danej przestrzeni metrycznej.
- (105) Znaleźć odległość punktu od zbioru w danej przestrzeni metrycznej dla zadanego punktu i zbioru.
- (106) Przy zadanej funkcji $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n, m \in \{1, 2\}$, sprawdzić jej ciągłość względem zadanych metryk w $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. W szczególności, w przypadku funkcji nieciągłych
 - a) podać przykład zbioru otwartego o przeciwobrazie nieotwartym
 - b) podać przykład zbioru domkniętego o przeciwobrazie niedomkniętym
 - c) podać przykład zbieżnego ciągu argumentów dziedziny, dla którego ciąg wartości nie jest zbieżny
 - d) pokazać, że w pewnym punkcie nie jest spełniony warunek z definicji Cauchy'ego ciągłości (z otoczeniami).
- (107) Sprawdzić, czy po przekształceniu przez zadaną funkcję w przestrzeniach metrycznych/topologicznych zachowana zostaje otwartość i domkniętość podzbiorów dziedziny (w szczególności w przypadku funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej).
- (108) Sprawdzić zwartość danego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$.
- (109) Sprawdzić spójność danego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$.
- (110) Dla zadanego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$, określić liczbę składowych spójnych tego zbioru, jego brzegu, jego domknięcia, jego wnętrza.
- (111) Dla zadanego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$, który nie jest przestrzenią zupełną, podać przykład ciągu Cauchy'ego, który nie jest zbieżny w tym podzbiorze.
- (112) Pokazać na przykładzie, że po przekształceniu przez funkcję nieciągłą zwartość i spójność dziedziny nie musi być zachowana.
- (113) Podzielić dane podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na grupy tak, aby dowolne dwa zbiory z tej samej grupy były homeomorficzne, a dowolne dwa zbiory z różnych grup nie były homeomorficzne.
- (114) Sprawdzić ciągłość, różniczkowalność w konkretnych punktach danego odwzorowania $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie U jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, w szczególności odwzorowania zdefiniowanego jako sklejenie kilku odwzorowań.
- (115) Wyliczyć pochodną kierunkową zadanej funkcji dwóch zmiennych oraz wyznaczyć kierunek maksymalnego wzrostu tej funkcji.
- (116) Obliczyć macierz pochodnej danego odwzorowania różniczkowalnego $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, gdzie U jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $n, k \in \{1, 2, 3\}$.
- (117) Wyznaczyć ekstrema lokalne danej funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych.
- (118) Wyznaczyć maksimum i minimum danej funkcji ciągłej określonej na zdanym zwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$.
- (119) Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji określonej na podzbiorze $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$ metodą mnożników Lagrange'a.
- (120) Wyznaczyć ekstrema lokalne danej funkcji zadanej w postaci uwikłanej za pomocą równania wielomianowego dwóch zmiennych, co najwyżej drugiego stopnia.
- (121) Obliczyć pole powierzchni figury na płaszczyźnie z wykorzystaniem twierdzenia Fubiniego.
- (122) Obliczyć objętość bryły w przestrzeni z wykorzystaniem twierdzenia Fubiniego.
- (123) Obliczyć całkę podwójną/potrójną z wykorzystaniem zmiany zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).
- (124) Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną i nieskierowaną.
- (125) Rozwiązać równanie różniczkowe rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych.
- (126) Rozwiązać równanie różniczkowe rzędu pierwszego liniowe jednorodne.

- (127) Rozwiązać równanie różniczkowe rzędu pierwszego liniowe niejednorodne.
- (128) Rozwiązać problem początkowy dla równania różniczkowego rzędu drugiego jednorodnego o stałych współczynnikach.
- (129) Określić charakter punktów równowagi w przypadku układów dwóch równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego o stałych współczynnikach.
- (130) Rozwiązać proste zadanie kombinatoryczne, w którym należy określić, na ile sposobów można rozmieścić zadane (rozdzielalne lub nie) przedmioty w podany sposób.
- (131) Obliczyć, ile jest funkcji pomiędzy danymi zbiorami skończonymi spełniających zadane dodatkowe warunki (typu: injektywność, monotoniczność)
- (132) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego prostym zadaniem tekstowym (w tym możliwe wykorzystanie podstawowych pojęć kombinatorycznych: permutacja, wariacja, kombinacja).
- (133) Obliczyć prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia, znając prawdopodobieństwo sumy lub iloczynu tego zdarzenia z innym zdarzeniem lub wiedząc o niezależności tych zdarzeń.
- (134) Sprawdzić, czy podane przykłady zdarzeń są niezależne.
- (135) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia znając prawdopodobieństwa warunkowe zajścia tego zdarzenia, w tym stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite.
- (136) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia stosując twierdzenie Bayesa.
- (137) Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia w schemacie Bernoullego.
- (138) Sprawdzić, czy funkcja określona na przestrzeni probabilistycznej jest zmienną losową.
- (139) Mając dany rozkład wektora losowego (X, Y) sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne.
- (140) Dla danej zmiennej losowej X o rozkładzie dyskretnym i funkcji $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X)$.
- (141) Dla danej zmiennej losowej X o gęstości f_X i danej funkcji $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X)$.
- (142) Dla danej zmiennej losowej X o gęstości f_X i danej funkcji $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ znaleźć dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej $\Phi(X)$.
- (143) Mając dany rozkład dyskretny wektora losowego (X, Y) i funkcję $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X, Y)$.
- (144) Mając daną gęstość rozkładu pewnej zmiennej losowej ξ , wyznaczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej (lub jej wariancję, dystrybuantę, określić prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\omega : a \leq \xi(\omega) \leq b\}$, wyznaczyć kwantyl podanego rzędu).
- (145) Mając daną dystrybuantę rozkładu pewnej zmiennej losowej ξ , wyznaczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej (lub jej wariancję, określić prawdopodobieństwo zdarzeń postaci $\{\omega : a \leq \xi(\omega) \leq b\}$, $\{\omega : a < \xi(\omega) \leq b\}$, $\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}$, $\{\omega : a < \xi(\omega) < b\}$, wyznaczyć kwantyl podanego rzędu).
- (146) Mając dany ciąg (kilkunastu) liczb, wyznaczyć odchylenie standardowe (albo: rozstęp, wartość średnią, medianę, górny i dolny kwantyl).
- (147) Rozwiązać proste zadanie tekstowe z zastosowaniem centralnego twierdzenia granicznego.

Aktualizacja: 7 grudnia 2021 r.