WYKAZ PYTAŃ NA EGZAMIN LICENCJACKI

(1) Rozwiązać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (zmienna rzeczywista).
(2) Rozwiązać równania i nierówności pierwiastkowe z jedną niewiadomą.
(3) Rozwiązać równania i nierówności z wartością bezwzględną, z jedną niewiadomą.
(4) Rozwiązać nierówności wymierne z jedną niewiadomą.
(5) Rozwiązać równania i nierówności wykładnicze.
(6) Rozwiązać równania i nierówności logarytmiczne.
(7) Rozwiązać równania i nierówności trygonometryczne (z zastosowaniem prostych wzorów trygonometrycznych i wzorów redukcyjnych).
(8) Rozwiązać graficznie na płaszczyźnie nierówności zadane przez funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych.
(9) Rozwiązać równania kwadratowe z jedną niewiadomą (zmienna zespolona).
(10) Dowieść twierdzeń o liczbach naturalnych za pomocą zasady indukcji matematycznej.
(11) Dla zadanej rodziny zbiorów indeksowanych jednym, dwoma lub trzema wskaźnikami znaleźć wynik operacji sumy/przecięcia po odpowiedniej rodzinie/rodzinach indeksów.
(12) Dla podanego zbioru skończonego A wypisać zbiór jego podzbiorów $P(A)$.
(13) Uzasadnić zależności lub podać kontrprzykłady dla zbiorów połączonych działaniami "$\cup$", "$\cap$", "$\setminus$", "$\times$" oraz relacjami "$\subset$", "$=$".
(14) Dla podanego podzbioru $\mathbb{R}$ znaleźć jego kres górny oraz kres dolny.
(15) Sprawdzić, czy podana relacja jest relacją równoważności.
(16) Dla zadanej relacji równoważności znaleźć klasy równoważności.
(17) Sprawdzić, czy podana funkcja jest surjekcją i injekcją.
(18) Dla zadanej funkcji znaleźć obrazy danych podzbiorów dziedziny i przeciwobrazy danych podzbiorów przeciwdziedziny.
(19) Sprawdzić, czy podana relacja jest odwzorowaniem, a jeśli tak, to wyznaczyć jej dziedzinę i zbiór wartości.
(20) Sprawdzić, czy podana relacja jest relacją częściowego porządku/liniowego porządku.
(21) Dla zadanej relacji częściowego porządku wskazać przykłady łańcuchów i antyłańcuchów o zadanej mocy.
(22) Dla zadanej relacji częściowego porządku znaleźć elementy maksymalne i minimalne.
(23) Wykazać równoliczność z $\mathbb{N}$ zadanego zbioru przeliczalnego.
(24) Dla podanego zbioru, w szczególności podzbioru $\mathbb{R}^n$, znaleźć jego moc.
(25) Obliczyć granicę ciągów typu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n + b_n + c_n}$, gdzie $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ są ciągami.
(26) Obliczyć granicę ciągów typu $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{w(n)}$, $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{a}{n})^{w(n)}$, $a > 0$, gdzie w jest wielomianem.
(27) Dla zadanego ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ znaleźć jego granicę górną $\limsup_{n\to\infty} a_n$ oraz granicę dolną $\liminf_{n\to\infty} a_n$.
(28) Obliczyć granicę typu $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$, gdzie $f(x) = \sqrt{h(x)}$, a g, h są wielomianami.
(29) Obliczyć granicę typu $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})$, gdzie f, g są wielomianami.
(30) Obliczyć granicę typu $\lim_{x\to c} \frac{f(ax)}{g(bx)}$, $a, b \in \mathbb{R}$, gdzie f, g są funkcjami trygonometrycznymi, wykładniczymi, logarytmicznymi lub wielomianami oraz $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$.
(31) Obliczyć granicę typu $\lim_{x\to c} f(x)$, gdzie f jest funkcją wymierną oraz $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$ (także granice jednostronne).
(32) Obliczyć granicę typu $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$.
(33) Obliczyć pochodną iloczynu funkcji, ilorazu funkcji, funkcji złożonej jednej zmiennej.
(34) Obliczyć pochodną funkcji typu $x \mapsto f(x)^{g(x)}$.
(35) Obliczyć pochodną funkcji danej całką, w której górna granica całkowania jest zależna od zmiennej, względem której różniczkujemy.
(36) Znaleźć ekstrema lokalne zadanej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

(37) Znaleźć asymptoty pionowe, poziome i ukośne funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
(38) Określić przedziały, w których podana funkcja jednej zmiennej rzeczywistej (wielomian, funkcja wymierna, funkcje złożone wykorzystujące funkcję wykładniczą, logarytmiczną, funkcje trygonometryczne) jest rosnąca, malejąca.
(39) Określić przedziały, w których podana funkcja jednej zmiennej rzeczywistej (wielomian, funkcja wymierna, funkcje złożone wykorzystujące funkcję wykładniczą, logarytmiczną, funkcje trygonometryczne) jest wypukła (do góry) lub wklęsła (inaczej: wypukła do dołu).
(40) Zbadać, czy istnieje najmniejsza i największa wartość danej funkcji różniczkowalnej na zadanym przedziale i ewentualnie je wyznaczyć.
(41) Rozwinąć daną funkcję w szereg Taylora w zadanym punkcie.
(42) Obliczyć całkę nieoznaczoną typu $\int f(x)g(x)dx$, gdzie f jest jednomianem lub wielomianem co najwyżej drugiego stopnia, a g jedną z funkcji: exponens, sinus, cosinus, logarytm naturalny.
(43) Obliczyć całkę nieoznaczoną metodą całkowania przez podstawienie.
(44) Obliczyć całkę nieoznaczoną metodą całkowania przez części.
(45) Obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji wymiernych.
(46) Obliczyć całkę nieoznaczoną typu $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$.
(47) Obliczyć całkę oznaczoną $\int_a^b f(t)dt$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, w szczególności sprawdzić, czy całka ta jest zbieżna.
(48) W oparciu o twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć pochodną funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, odwrotnej do danej (np. pochodną funkcji arcus sinus, arcus tangens).
(49) Obliczyć pole podanego obszaru, np. ograniczonego wykresami dwóch funkcji: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$.
(50) Obliczyć długość krzywej zadanej parametrycznie $(\alpha,\beta) \ni t \to (x(t),y(t)) \in \mathbb{R}^2$.
(51) Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji dookoła osi odciętych.
(52) Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji dookoła osi odciętych.
(53) Zbadać zbieżność (i jej rodzaj) zadanego szeregu liczbowego w oparciu o kryteria Cauchy'ego, d'Alemberta, Weierstrassa, Leibniza i warunek konieczny zbieżności szeregów.
(54) Wyznaczyć punkty, w których zadany szereg funkcyjny jest zbieżny bezwzględnie, zbieżny warunkowo, rozbieżny w oparciu o kryteria Cauchy'ego, d'Alemberta, Weierstrassa, Leibniza i warunek konieczny zbieżności szeregów.
(55) Rozwinąć podaną funkcję w szereg Fouriera na zadanym przedziale.
(56) W oparciu o wzór de Moivre'a wyznaczyć część rzeczywistą lub część urojoną potęgi podanej liczby zespolonej (np. Re $(\sqrt{3}-i)^{17}$, Im $(\cos\phi + i\sin\phi)^5$).
(57) Uprościć podaną potęgę korzystając ze wzoru Newtona i trójkąta Pascala (np. podać w postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie $a,b \in \mathbb{Q}$, liczbę $(1-\sqrt{2})^7$).
(58) Zbadać liniową niezależność danego układu wektorów.
(59) Sprawdzić, czy podane wektory stanowią bazę danej przestrzeni wektorowej.
(60) Sprawdzić, czy dana przestrzeń wektorowa jest sumą prostą wskazanych podprzestrzeni.
(61) Wyznaczyć bazę dualną do danej.
(62) Sprawdzić, czy dany zbiór jest podprzestrzenią wektorową danej przestrzeni wektorowej.
(63) Dla danej przestrzeni wektorowej i dwóch jej podprzestrzeni U, W wyznaczyć wymiary dla podprzestrzeni U, W, $U \cap W$ oraz $U + W$.
(64) Dla danej przestrzeni wektorowej i dwóch jej podprzestrzeni U, W podać przykłady baz dla podprzestrzeni U, W, $U \cap W$ oraz $U + W$.
(65) Dla danego odwzorowania liniowego f wyznaczyć bazę i wymiar przestrzeni Ker f i Im f.
(66) Sprawdzić, czy dane odwzorowanie jest epimorfizmem/monomorfizmem.
(67) Znaleźć odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n,m \in \{1,2,3,4\}$, o zadanym jądrze i obrazie.
(68) Wyznaczyć macierz odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, w danych bazach.

(69) Obliczyć wyznacznik macierzy o rozmiarach 2×2, 3×3 i 4×4 i współczynnikach rzeczywistych.
(70) Obliczyć iloczyn danych macierzy o współczynnikach rzeczywistych.
(71) Sprawdzić, czy dana macierz 2×2 lub 3×3 jest odwracalna, w zależności od parametru występującego w macierzy.
(72) Odwrócić macierz (odwracalną) o rozmiarach 2×2 lub 3×3 i współczynnikach rzeczywistych.
(73) Znaleźć wartości własne i wektory własne (po jednym dla każdej wartości własnej) endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, którego wielomian charakterystyczny ma tylko rzeczywiste pierwiastki.
(74) Znaleźć macierz Jordana endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, którego wielomian charakterystyczny ma tylko rzeczywiste pierwiastki.
(75) Rozwiązać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi o współczynnikach rzeczywistych.
(76) Wyznaczyć macierz formy kwadratowej na $\mathbb{R}^2$ w danej bazie.
(77) Znaleźć rząd danego odwzorowania liniowego.
(78) Sprawdzić, czy podana funkcja jest iloczynem skalarnym.
(79) W danej wektorowej przestrzeni z iloczynem skalarnym $(\mathbb{R}^n)$ zbadać prostopadłość wskazanych wektorów.
(80) Dla danej przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym $(\mathbb{R}^n)$ oraz pewnej jej podprzestrzeni wyznaczyć dopełnienie ortogonalne tej podprzestrzeni.
(81) Wyznaczyć największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych i przedstawić go w postaci kombinacji liniowej (o współczynnikach całkowitych) tych liczb.
(82) Rozwiązać zadany układ kongruencji liniowych (podać rozwiązanie ogólne bądź z konkretnie zadanego przedziału liczbowego).
(83) Zbadać istnienie/podać rozwiązanie zadanego liniowego równania diofantycznego postaci $ax + by = c$.
(84) Dla zadanych liczb całkowitych k i m wyliczyć k mod m z zastosowaniem twierdzeń Fermata lub Eulera.
(85) Przy danym zbiorze niepustym X i danym odwzorowaniu $* : X \times X \ni (a, b) \mapsto a * b \in X$ sprawdzić, czy $(X, *)$ jest grupą.
(86) W danej grupie sprawdzić, czy wskazany podzbiór tej grupy jest podgrupą.
(87) Dla danej grupy i jej podgrupy zbadać normalność tej podgrupy.
(88) Dla danej grupy i jej podgrupy normalnej wyznaczyć warstwy względem tej podgrupy (warstwę ustalonego elementu względem tej podgrupy).
(89) Dla zadanej grupy G i jej elementu a wyznaczyć podgrupę generowaną przez a bądź wyliczyć rząd elementu a.
(90) Dla zadanej grupy G i jej podgrupy normalnej H opisać elementy grupy ilorazowej G/H.
(91) Sprawdzić, czy dane odwzorowanie pomiędzy podanymi grupami jest homomorfizmem/epimorfizmem/monomorfizmem.
(92) Rozłożyć daną permutację na transpozycje oraz określić parzystość permutacji.
(93) Rozłożyć daną permutację na iloczyn cykli rozłącznych.
(94) Wypisać postać elementów w zadanym pierścieniu ilorazowym, sprawdzić czy istnieje i ewentualnie wyliczyć element odwrotny do zadanego elementu w takim pierścieniu.
(95) Wyznaczyć wszystkie dzielniki zera w danym pierścieniu.
(96) Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne w danym pierścieniu.
(97) W danym pierścieniu sprawdzić, czy wskazany podzbiór tego pierścienia jest ideałem w tym pierścieniu.
(98) Zbadać nierozkładalność zadanego wielomianu o współczynnikach w pierścieniach: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.
(99) Sprawdzić, czy dane odwzorowanie pomiędzy podanymi pierścieniami jest homomorfizmem /epimorfizmem/monomorfizmem.

(100) Sprawdzić, czy podana funkcja jest metryką na danym zbiorze.
(101) Sprawdzić, czy podana funkcja jest normą na danym zbiorze.
(102) Przy zadanej metryce wyznaczyć/naszkicować kule otwarte/domknięte o zadanym środku i promieniu.
(103) W danej przestrzeni metrycznej/topologicznej znaleźć wnętrze, domknięcie, brzeg zadanych zbiorów.
(104) Sprawdzić otwartość/domkniętość zadanego podzbioru danej przestrzeni metrycznej.
(105) Znaleźć odległość punktu od zbioru w danej przestrzeni metrycznej dla zadanego punktu i zbioru.
(106) Przy zadanej funkcji $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \{1, 2\}$, sprawdzić jej ciągłość względem zadanych metryk w $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. W szczególności, w przypadku funkcji nieciągłych
a) podać przykład zbioru otwartego o przeciwobrazie nieotwartym
b) podać przykład zbioru domkniętego o przeciwobrazie niedomkniętym
c) podać przykład zbieżnego ciągu argumentów dziedziny, dla którego ciąg wartości nie jest zbieżny
d) pokazać, że w pewnym punkcie nie jest spełniony warunek z definicji Cauchy'ego ciągłości (z otoczeniami).
(107) Sprawdzić, czy po przekształceniu przez zadaną funkcję w przestrzeniach metrycznych/topologicznych zachowana zostaje otwartość i domkniętość podzbiorów dziedziny (w szczególności w przypadku funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej).
(108) Sprawdzić zwartość danego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$.
(109) Sprawdzić spójność danego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$.
(110) Dla zadanego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$, określić liczbę składowych spójnych tego zbioru, jego brzegu, jego domknięcia, jego wnętrza.
(111) Dla zadanego podzbioru $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$, który nie jest przestrzenią zupełną, podać przykład ciągu Cauchy'ego, który nie jest zbieżny w tym podzbiorze.
(112) Pokazać na przykładzie, że po przekształceniu przez funkcję nieciągłą zwartość i spójność dziedziny nie musi być zachowana.
(113) Podzielić dane podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na grupy tak, aby dowolne dwa zbiory z tej samej grupy były homeomorficzne, a dowolne dwa zbiory z różnych grup nie były homeomorficzne.
(114) Sprawdzić ciągłość, różniczkowalność w konkretnych punktach danego odwzorowania $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, w szczególności odwzorowania zdefiniowanego jako sklejenie kilku odwzorowań.
(115) Wyliczyć pochodną kierunkową zadanej funkcji dwóch zmiennych oraz wyznaczyć kierunek maksymalnego wzrostu tej funkcji.
(116) Obliczyć macierz pochodnej danego odwzorowania różniczkowalnego $f : U \to \mathbb{R}^k$, gdzie U jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $n, k \in \{1, 2, 3\}$.
(117) Wyznaczyć ekstrema lokalne danej funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych.
(118) Wyznaczyć maksimum i minimum danej funkcji ciągłej określonej na zadanym zwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2\}$.
(119) Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji określonej na podzbiorze $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$ metodą mnożników Lagrange'a.
(120) Wyznaczyć ekstrema lokalne danej funkcji zadanej w postaci uwikłanej za pomocą równania wielomianowego dwóch zmiennych, co najwyżej drugiego stopnia.
(121) Obliczyć pole powierzchni figury na płaszczyźnie z wykorzystaniem twierdzenia Fubiniego.
(122) Obliczyć objętość bryły w przestrzeni z wykorzystaniem twierdzenia Fubiniego.
(123) Obliczyć całkę podwójną/potrójną z wykorzystaniem zmiany zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).
(124) Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną i nieskierowaną.
(125) Rozwiązać równanie różniczkowe rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych.
(126) Rozwiązać równanie różniczkowe rzędu pierwszego liniowe jednorodne.

(127) Rozwiązać równanie różniczkowe rzędu pierwszego liniowe niejednorodne.
(128) Rozwiązać problem początkowy dla równania różniczkowego rzędu drugiego jednorodnego o stałych współczynnikach.
(129) Określić charakter punktów równowagi w przypadku układów dwóch równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego o stałych współczynnikach.
(130) Rozwiązać proste zadanie kombinatoryczne, w którym należy określić, na ile sposobów można rozmieścić zadane (rozróżnialne lub nie) przedmioty w podany sposób.
(131) Obliczyć, ile jest funkcji pomiędzy danymi zbiorami skończonymi spełniających zadane dodatkowe warunki (typu: injektywność, monotoniczność)
(132) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego prostym zadaniem tekstowym (w tym możliwe wykorzystanie podstawowych pojęć kombinatorycznych: permutacja, wariacja, kombinacja).
(133) Obliczyć prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia, znając prawdopodobieństwo sumy lub iloczynu tego zdarzenia z innym zdarzeniem lub wiedząc o niezależności tych zdarzeń.
(134) Sprawdzić, czy podane przykłady zdarzeń są niezależne.
(135) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia znając prawdopodobieństwa warunkowe zajścia tego zdarzenia, w tym stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite.
(136) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia stosując twierdzenie Bayesa.
(137) Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia w schemacie Bernoullego.
(138) Sprawdzić, czy funkcja określona na przestrzeni probabilistycznej jest zmienną losową.
(139) Mając dany rozkład wektora losowego (X, Y) sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne.
(140) Dla danej zmiennej losowej X o rozkładzie dyskretnym i funkcji $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X)$.
(141) Dla danej zmiennej losowej X o gęstości f_X i danej funkcji $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X)$.
(142) Dla danej zmiennej losowej X o gęstości f_X i danej funkcji $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ znaleźć dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej $\Phi(X)$.
(143) Mając dany rozkład dyskretny wektora losowego (X, Y) i funkcję $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X, Y)$.
(144) Mając daną gęstość rozkładu pewnej zmiennej losowej ξ, wyznaczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej (lub jej wariancję, dystrybuantę, określić prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\omega : a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b\}$, wyznaczyć kwantyl podanego rzędu).
(145) Mając daną dystrybuantę rozkładu pewnej zmiennej losowej ξ, wyznaczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej (lub jej wariancję, określić prawdopodobieństwo zdarzeń postaci $\{\omega : a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b\}$, $\{\omega : a < \xi(\omega) \leqslant b\}$, $\{\omega : a \leqslant \xi(\omega) < b\}$, $\{\omega : a < \xi(\omega) < b\}$, wyznaczyć kwantyl podanego rzędu).
(146) Mając dany ciąg (kilkunastu) liczb, wyznaczyć odchylenie standardowe (albo: rozstęp, wartość średnią, medianę, górny i dolny kwartyl).
(147) Rozwiązać proste zadanie tekstowe z zastosowaniem centralnego twierdzenia granicznego.

Aktualizacja: 14 listopada 2020 r.