Matematyka komputerowa — pytania na egzamin licencjacki

- **Elementy logiki i teorii mnogości**

  1. Relacja równoważności: definicja, przykłady, zastosowania.
  2. Relacje częściowego i liniowego porządku: definicja i przykłady.
  3. Moc zbioru. Twierdzenie Cantora i Cantora-Bernsteina.

- **Analiza matematyczna**

  4. Wielomiany trygonometryczne i szeregi Fouriera.
  5. Twierdzenia o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej. Przykłady zastosowań.
  6. Szereg potęgowy, promień zbieżności. Funkcje dane przez szeregi potęgowe (np. e^x, $\sin x$).
  7. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Twierdzenia o ciągłości, całkowalności, różniczkowalności funkcji granicznej.
  8. Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej. Definicja, istnienie, interpretacja geometryczna.

- **Algebra liniowa z geometrią**

  9. Wektory własne i wartości własne macierzy kwadratowej.
  10. Przestrzeń wektorowa, baza i wymiar przestrzeni. Przykłady przestrzeni wektorowych skończenie i nieskończenie wymiarowych.
  11. Ciało liczb zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry.

- **Programowanie**

  12. Programowanie obiektowe i obiektowo orientowane: enkapsulacja, dziedziczenie, polimorfizm, klasy abstrakcyjne.
  13. Programowanie funkcyjne i jego elementy w językach programowania C++-14 i Python (funkcje anonimowe, wskaźniki do funkcji, obiekty funkcyjne, rekursja).
  14. Programowanie generyczne – szablony funkcji i klas, polimorfizm statyczny, metaprogramowanie.

- **Warsztat programisty**

  15. Hierarchia Chomsky'ego: automaty skończone, gramatyki bezkontekstowe i kontekstowe, maszyna Turinga.
  16. Liczby całkowite i zmiennopozycyjne: sposoby kodowania, dokładność i zakres.

- **Wprowadzenie do topologii**

  17. Przestrzeń zwarta i jej własności.
  18. Zbiory spójne i składowe spójne

- **Algebra obliczeniowa**

19. Twierdzenie Lagrange'a w teorii grup i jego zastosowania.
20. Homomorfizmy grup i ich podstawowe własności; twierdzenia fundamentalne o izomorfizmach grup; grupy permutacji i twierdzenie Cayley'a.
21. Klasyfikacja grup abelowych skończenie generowanych.

- **Wstęp do matematyki dysktretnej**

22. Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ w zależności od m; rozszerzony algorytm Euklidesa.
23. Grafy hamiltonowskie i eulerowskie; definicje i twierdzenia.

- **Metody programowania, Algorytmy i struktury danych**

24. Grafy: reprezentacje, metody przeglądania; omówić wybraną metodę.
25. Metoda „dziel i zwyciężaj": zalety i wady, przykłady zastosowań.
26. Zasada algorytmu zachłannego, przykład poprawnego i niepoprawnego wykorzystania.
27. Drzewa BST: definicja, zastosowania i metody dostępu.
28. Złożoność obliczeniowa algorytmów: definicja, notacja i przykłady.

- **Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka**

29. Zmienna losowa: definicja, rodzaje i rozkłady.
30. Prawa wielkich liczb i ich znaczenie.

- **Dynamika obliczeniowa**

31. Definicja układu dynamicznego. Przykłady.
32. Stabilność i asymptotyczna stabilność punktu stałego. Tw. Grobmana-Hartmana
33. Zbiór rozwiązań równania $x' = Ax$, gdzie A jest rzeczywistą macierzą kwadratowa.

- **Metody numeryczne**

34. Rozwiązywanie układu równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa i metoda Gaussa-Seidla; porównanie metod.
35. Metody interpolacji wielomianowej.

- **Topologia obliczeniowa**

36. Lemat Spernera i Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.
37. Grupa homologii symplicjalnych kompleksu symplicjalnego.

- **Dyskretne układy dynamiczne**

38. Rozmaitości niezmiennicze hiperbolicznych punktów stałych.
39. Homeomorfizmy okręgu i liczba obrotu.
40. Układy chaotyczne – definicja i przykłady.

Zestaw 1

1. Twierdzenia o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej. Przykłady zastosowań.
2. Programowanie generyczne – szablony funkcji i klas, polimorfizm statyczny, metaprogramowanie.
3. Zbiór rozwiązań równania $x' = Ax$, gdzie A jest rzeczywistą macierzą kwadratowa.

Zestaw 2

1. Moc zbioru. Twierdzenie Cantora i Cantora-Bernsteina.
2. Wektory własne i wartości własne macierzy kwadratowej.
3. Liczby całkowite i zmiennopozycyjne: sposoby kodowania, dokładność i zakres.

Zestaw 3

1. Szereg potęgowy, promień zbieżności. Funkcje dane przez szeregi potęgowe (np. e^x, $\sin x$).
2. Zbiory spójne i składowe spójne
3. Metoda „dziel i zwyciężaj": zalety i wady, przykłady zastosowań.

Zestaw 4

1. Wielomiany trygonometryczne i szeregi Fouriera.
2. Grafy hamiltonowskie i eulerowskie; definicje i twierdzenia.
3. Programowanie obiektowe i obiektowo orientowane: enkapsulacja, dziedziczenie, polimorfizm, klasy abstrakcyjne.

Zestaw 5

1. Twierdzenie Lagrange'a w teorii grup i jego zastosowania.
2. Rozwiązywanie układu równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa i metoda Gaussa-Seidla; porównanie metod.
3. Hierarchia Chomsky'ego: automaty skończone, gramatyki bezkontekstowe i kontekstowe, maszyna Turinga.

Zestaw 6

1. Przestrzeń wektorowa, baza i wymiar przestrzeni. Przykłady przestrzeni wektorowych skończenie i nieskończenie wymiarowych.
2. Homeomorfizmy okręgu i liczba obrotu.
3. Drzewa BST: definicja, zastosowania i metody dostępu.

Zestaw 7

1. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Twierdzenia o ciągłości, całkowalności, różniczkowalności funkcji granicznej.
2. Lemat Spernera i Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.
3. Grafy: reprezentacje, metody przeglądania; omówić wybraną metodę.

Zestaw 8

1. Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej. Definicja, istnienie, interpretacja geometryczna.
2. Zmienna losowa: definicja, rodzaje i rozkłady.
3. Programowanie funkcyjne i jego elementy w językach programowania C++-14 i Python (funkcje anonimowe, wskaźniki do funkcji, obiekty funkcyjne, rekursja).

Zestaw 9

1. Przestrzeń zwarta i jej własności.
2. Stabilność i asymptotyczna stabilność punktu stałego. Tw. Grobmana-Hartmana
3. Zasada algorytmu zachłannego, przykład poprawnego i niepoprawnego wykorzystania.

Zestaw 10

1. Ciało liczb zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry.
2. Rozmaitości niezmiennicze hiperbolicznych punktów stałych.
3. Złożoność obliczeniowa algorytmów: definicja, notacja i przykłady.

Zestaw 11

1. Homomorfizmy grup i ich podstawowe własności; twierdzenia fundamentalne o izomorfizmach grup; grupy permutacji i twierdzenie Cayley'a.
2. Metody interpolacji wielomianowej.
3. Hierarchia Chomsky'ego: automaty skończone, gramatyki bezkontekstowe i kontekstowe, maszyna Turinga.

Zestaw 12

1. Klasyfikacja grup abelowych skończenie generowanych.
2. Definicja układu dynamicznego. Przykłady.
3. Programowanie obiektowe i obiektowo orientowane: enkapsulacja, dziedziczenie, polimorfizm, klasy abstrakcyjne.

Zestaw 13

1. Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ w zależności od m; rozszerzony algorytm Euklidesa.
2. Układy chaotyczne – definicja i przykłady.
3. Zasada algorytmu zachłannego, przykład poprawnego i niepoprawnego wykorzystania.

Zestaw 14

1. Prawa wielkich liczb i ich znaczenie.
2. Grupa homologii symplicjalnych kompleksu symplicjalnego.
3. Złożoność obliczeniowa algorytmów: definicja, notacja i przykłady.