

# Matematyka komputerowa — pytania na egzamin licencjacki 2021/2022

- **Elementy logiki i teorii mnogości**

1. Relacja równoważności: definicja, przykłady, zastosowania.
2. Relacje częściowego i liniowego porządku: definicja i przykłady.
3. Moc zbioru. Twierdzenie Cantora i Cantora-Bernsteina.

- **Analiza matematyczna**

4. Wielomiany trygonometryczne i szeregi Fouriera.
5. Twierdzenia o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej. Przykłady zastosowań.
6. Szereg potęgowy, promień zbieżności. Funkcje dane przez szeregi potęgowe (np.  $e^x$ ,  $\sin x$ ).
7. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Twierdzenia o ciągłości, całkowalności, różniczkowalności funkcji granicznej.
8. Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej. Definicja, istnienie, interpretacja geometryczna.

- **Algebra liniowa z geometrią**

9. Wektory własne i wartości własne macierzy kwadratowej.
10. Przestrzeń wektorowa, baza i wymiar przestrzeni. Przykłady przestrzeni wektorowych skończone i nieskończone wymiarowych.
11. Ciało liczb zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry.

- **Programowanie**

12. Programowanie obiektowe i obiektowo orientowane: enkapsulacja, dziedziczenie, polimorfizm, klasy abstrakcyjne.
13. Programowanie funkcyjne i jego elementy w językach programowania C++-14 i Python (funkcje anonimowe, wskaźniki do funkcji, obiekty funkcyjne, rekursja).
14. Programowanie generyczne – szablony funkcji i klas, polimorfizm statyczny, metaprogramowanie.

- **Warsztat programisty**

15. Hierarchia Chomsky'ego: automaty skończone, gramatyki bezkontekstowe i kontekstowe, maszyna Turinga.
16. Liczby całkowite i zmiennopozycyjne: sposoby kodowania, dokładność i zakres.

- **Wprowadzenie do topologii**

17. Przestrzeń zwarta i jej własności.
18. Zbiory spójne i składowe spójne

- **Algebra obliczeniowa**
  19. Twierdzenie Lagrange'a w teorii grup i jego zastosowania.
  20. Homomorfizmy grup i ich podstawowe własności; twierdzenia fundamentalne o izomorfizmach grup; grupy permutacji i twierdzenie Cayley'a.
  21. Klasyfikacja grup abelowych skończenie generowanych.
- **Wstęp do matematyki dyskretniej**
  22. Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  w zależności od  $m$ ; rozszerzony algorytm Euklidesa.
  23. Grafy hamiltonowskie i eulerowskie; definicje i twierdzenia.
- **Metody programowania, Algorytmy i struktury danych**
  24. Grafy: reprezentacje, metody przeglądania; omówić wybraną metodę.
  25. Metoda „dziel i zwyciężaj”: zalety i wady, przykłady zastosowań.
  26. Zasada algorytmu zachłannego, przykład poprawnego i niepoprawnego wykorzystania.
  27. Drzewa BST: definicja, zastosowania i metody dostępu.
  28. Złożoność obliczeniowa algorytmów: definicja, notacja i przykłady.
- **Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka**
  29. Zmienna losowa: definicja, rodzaje i rozkłady.
  30. Prawa wielkich liczb i ich znaczenie.
- **Dynamika obliczeniowa**
  31. Definicja układu dynamicznego. Przykłady.
  32. Stabilność i asymptotyczna stabilność punktu stałego. Tw. Grobmana-Hartmana
  33. Zbiór rozwiązań równania  $x' = Ax$ , gdzie  $A$  jest rzeczywistą macierzą kwadratową.
- **Metody numeryczne**
  34. Rozwiązywanie układu równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa i metoda Gaussa-Seidla; porównanie metod.
  35. Metody interpolacji wielomianowej.
- **Topologia obliczeniowa**
  36. Lemat Spernera i Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.
  37. Grupa homologii sympleksyjnego kompleksu sympleksyjnego.
- **Dyskretne układy dynamiczne**
  38. Rozmaitości niezmiennicze hiperbolicznych punktów stałych.
  39. Homeomorfizmy okręgu i liczba obrotu.
  40. Układy chaotyczne – definicja i przykłady.

## Zestaw 1

1. Twierdzenia o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej. Przykłady zastosowań.
2. Programowanie generyczne – szablony funkcji i klas, polimorfizm statyczny, metaprogramowanie.
3. Zbiór rozwiązań równania  $x' = Ax$ , gdzie  $A$  jest rzeczywistą macierzą kwadratową.

## Zestaw 2

1. Moc zbioru. Twierdzenie Cantora i Cantora-Bernsteina.
2. Wektory własne i wartości własne macierzy kwadratowej.
3. Liczby całkowite i zmiennopozycyjne: sposoby kodowania, dokładność i zakres.

## Zestaw 3

1. Szereg potęgowy, promień zbieżności. Funkcje dane przez szeregi potęgowe (np.  $e^x$ ,  $\sin x$ ).
2. Zbiory spójne i składowe spójne
3. Metoda „dziel i zwyciężaj”: zalety i wady, przykłady zastosowań.

## Zestaw 4

1. Wielomiany trygonometryczne i szeregi Fouriera.
2. Grafy hamiltonowskie i eulerowskie; definicje i twierdzenia.
3. Programowanie obiektowe i obiektowo orientowane: enkapsulacja, dziedziczenie, polimorfizm, klasy abstrakcyjne.

## Zestaw 5

1. Twierdzenie Lagrange’a w teorii grup i jego zastosowania.
2. Rozwiązywanie układu równań liniowych: metoda eliminacji Gaussa i metoda Gaussa-Seidla; porównanie metod.
3. Hierarchia Chomsky’ego: automaty skończone, gramatyki bezkontekstowe i kontekstowe, maszyna Turinga.

## Zestaw 6

1. Przestrzeń wektorowa, baza i wymiar przestrzeni. Przykłady przestrzeni wektorowych skończenie i nieskończenie wymiarowych.
2. Homeomorfizmy okręgu i liczba obrotu.
3. Drzewa BST: definicja, zastosowania i metody dostępu.

## Zestaw 7

1. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Twierdzenia o ciągłości, całkowalności, różniczkowalności funkcji granicznej.
2. Lemat Spenera i Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.
3. Grafy: reprezentacje, metody przeglądania; omówić wybraną metodę.

## Zestaw 8

1. Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej. Definicja, istnienie, interpretacja geometryczna.
2. Zmienna losowa: definicja, rodzaje i rozkłady.
3. Programowanie funkcyjne i jego elementy w językach programowania C++-14 i Python (funkcje anonimowe, wskaźniki do funkcji, obiekty funkcyjne, rekursja).

## Zestaw 9

1. Przestrzeń zwarta i jej własności.
2. Stabilność i asymptotyczna stabilność punktu stałego. Tw. Grobmana-Hartmana
3. Zasada algorytmu zachłannego, przykład poprawnego i niepoprawnego wykorzystania.

## Zestaw 10

1. Ciało liczb zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry.
2. Rozmaitości niezmiennicze hiperbolicznych punktów stałych.
3. Złożoność obliczeniowa algorytmów: definicja, notacja i przykłady.

## Zestaw 11

1. Homomorfizmy grup i ich podstawowe własności; twierdzenia fundamentalne o izomorfizmach grup; grupy permutacji i twierdzenie Cayley'a.
2. Metody interpolacji wielomianowej.
3. Hierarchia Chomsky'ego: automaty skończone, gramatyki bezkontekstowe i kontekstowe, maszyna Turinga.

## Zestaw 12

1. Klasyfikacja grup abelowych skończenie generowanych.
2. Definicja układu dynamicznego. Przykłady.
3. Programowanie obiektowe i obiektowo orientowane: enkapsulacja, dziedziczenie, polimorfizm, klasy abstrakcyjne.

### Zestaw 13

1. Istnienie elementów odwrotnych względem mnożenia w strukturze  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  w zależności od  $m$ ; rozszerzony algorytm Euklidesa.
2. Układy chaotyczne – definicja i przykłady.
3. Zasada algorytmu zachłannego, przykład poprawnego i niepoprawnego wykorzystania.

### Zestaw 14

1. Prawa wielkich liczb i ich znaczenie.
2. Grupa homologii symplecjonalnych kompleksu symplecjonalnego.
3. Złożoność obliczeniowa algorytmów: definicja, notacja i przykłady.